

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Радиоэлектроника»

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНАМ
«ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ»,
«ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ В РАДИОТЕХНИКЕ»,
«ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ В СИСТЕМАХ СВЯЗИ»

Ростов-на-Дону

ДГТУ

2021

УДК 62

Составители: Ю.А. Шокова, М.Ю. Звездина

Задания и методические указания к выполнению контрольной работы по дисциплинам «Обработка экспериментальных данных», «Обработка экспериментальных данных в радиотехнике», «Обработка экспериментальных данных в системах связи». – Ростов-на-Дону : Донской гос. техн. ун-т, 2021. – 32 с.

Приведены методические указания к выполнению контрольной работы по дисциплинам, связанным с обработкой экспериментальных данных.

Предназначены для обучающихся заочного отделения направлений подготовки 11.03.01 Радиотехника и 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи.

УДК 62

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Донского государственного технического университета

Научный редактор канд. техн. наук, доцент О.Ю. Назарова

Ответственный за выпуск зав. кафедрой «Радиоэлектроника» канд. техн. наук,
доцент С.В. Лазаренко

В печать ____ . ____ . 20 ____ г.
Формат 60×84/16. Объем ____ усл. п. л.
Тираж ____ экз. Заказ № ____.

Издательский центр ДГТУ
Адрес университета и полиграфического предприятия:
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

© Донской государственный
технический университет, 2021

Содержание

1	Общие указания по выполнению контрольной работы	4
2	Краткие теоретические сведения	4
2.1	Регрессионный анализ (линейный одномерный случай)	4
2.1.1	Нахождение уравнения регрессии	4
2.1.2	Проверка значимости уравнения регрессии	6
2.2	Корреляционный анализ (линейный одномерный случай)	7
2.2.1	Нахождение и анализ коэффициента корреляции	7
2.2.2	Проверка значимости коэффициента корреляции	9
2.3	Дисперсионный анализ (однофакторный одномерный случай)	9
2.3.1	Проверка равенства дисперсий	9
2.3.2	2 Анализ данных	10
3	Выполнение работы	12
3.1	Выбор варианта работы	12
3.2	Пример выполнения задания	13
3.2.1	Регрессионный анализ	13
3.2.2	Корреляционный анализ	16
3.2.2	Дисперсионный анализ	18
4	Задания на контрольную работу	21
4.1	Регрессионный анализ	21
4.2	Корреляционный анализ	22
4.3	Дисперсионный анализ	24
5	Статистические таблицы	30
	Перечень использованных информационных ресурсов	32

1 Общие указания по выполнению контрольной работы

Учебным планом для студентов заочного обучения по подготовки 11.03.01 Радиотехника и 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи предусмотрено выполнение одной контрольной работы.

Работа заключается в проведении одного из видов статистического анализа экспериментальных данных согласно варианту.

Контрольная работа может выполняться как в печатном, так и в письменном виде. В печатном виде она распечатывается на листах формата А4 с использованием одной стороны листа. Вторая сторона листа оставляется для внесения исправлений. Все страницы нумеруются. В письменном виде работа выполняется в тетради в клетку (12 листов), поля оставляются для внесения исправлений или простановки отметок при проверке.

В работе обязательно указывается номер задания и условия задачи.

Контрольная работа сдается на кафедру или в деканат заблаговременно до сдачи зачета по дисциплине.

Во время зачета необходимо быть готовым дать пояснения по существу решения задачи в контрольной работе.

2 Краткие теоретические сведения

2.1 Регрессионный анализ (линейный одномерный случай)

Главная задача регрессионного анализа – по входным (исходным) данным эксперимента (значениям независимой переменной) и выходным данным (значениям зависимой переменной) записать уравнение, связывающее зависимую и независимую переменные. В регрессионном анализе часто независимая переменная называется фактором, а зависимая - откликом.

2.1.1 Нахождение уравнения регрессии

Пусть в эксперименте рассматривалась зависимость одного отклика от одного фактора. Рассмотрим данные эксперимента: вектор значений фактора $X = \{x_i\}_{i=1}^N$ и вектор значений отклика $Y = \{y_i\}_{i=1}^N$.

Пусть также при построении диаграммы рассеяния – точек с координатами (x_i, y_i) на декартовой плоскости – расположение точек носит почти линейный характер, как показано на рисунке 1.

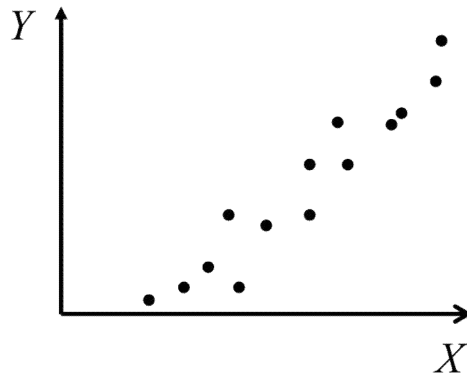


Рисунок 1

Тогда можно предположить то, что зависимость отклика y от фактора x носит линейный характер хотя бы в области $[x_{\min}, x_{\max}]$, то есть ее можно записать функцией

$$y(x) = Ax + B. \quad (1.1)$$

Отклонения точек от этой прямой носят случайный характер. Можно предположить, что отклонения связаны с наличием случайной ошибки

$$\varepsilon_i = y_i - (Ax_i + B). \quad (1.2)$$

Найти точные значения коэффициентов A и B нельзя, однако по исходным данным можно получить их оценку a и b соответственно, то есть

$$y(x) = ax + b. \quad (1.3)$$

Значения a и b находятся так, чтобы прямая (1.3) проходила как можно ближе ко всем точкам, то есть с минимальной суммарной ошибкой. Функция суммарной ошибки может быть записана следующим образом:

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) a^2 + Nb^2 + \left(2 \sum_{i=1}^N x_i \right) ab - \left(2 \sum_{i=1}^N x_i y_i \right) a - \left(2 \sum_{i=1}^N y_i \right) b + \left(\sum_{i=1}^N y_i^2 \right). \quad (1.4)$$

Для того, чтобы найти минимум этой функции необходимо решить следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) a + Nb = \sum_{i=1}^N y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) b = \sum_{i=1}^N x_i y_i. \end{cases} \quad (1.5)$$

Данная СЛАУ решается любым из известных методов (Гаусса, Крамера, и т.д.).

Полученные в результате решения значения a и b и будут требуемыми оценками истинных коэффициентов регрессии A и B , а прямая $y(x) = ax + b$ пройдет как можно ближе к точкам (x_i, y_i) .

Таким образом, для нахождения уравнения регрессии необходимо:

а) построить диаграмму рассеяния, убедиться, что расположение точек (x_i, y_i) носит почти линейный характер;

б) по значениям фактора и отклика посчитать $\sum_{i=1}^N x_i$, $\sum_{i=1}^N x_i^2$, $\sum_{i=1}^N x_i y_i$, и $\sum_{i=1}^N y_i$. Записать СЛАУ в явном виде;

в) решить СЛАУ;

г) записать уравнение регрессии в явном виде, построить его на диаграмме рассеяния.

2.1.2 Проверка значимости уравнения регрессии

Для проверки значимости уравнения регрессии необходимо рассчитать выборочный коэффициент детерминации R^2

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N ((ax_i + b) - y_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}, \quad (1.6)$$

где \bar{y} - среднее значение отклика y , вычисляющееся по формуле

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i. \quad (1.7)$$

Далее для проверки значимости уравнения регрессии по значимости генерального коэффициента детерминации (то есть того, что на генеральной совокупности коэффициент детерминации также отличен от нуля), воспользуемся алгоритмом проверки статистических гипотез.

Выдвинем нулевую гипотезу о незначимости генерального коэффициента детерминации:

$$H_0: R_{TC}^2 = 0$$

По выборке рассчитаем значение статистики

$$F_{\text{набл}} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot (N - 2). \quad (1.8)$$

Зададимся уровнем значимости α (обычно $\alpha = 0,05$) и по таблицам значений распределения Фишера для α по числу степеней свободы $k_1=1$, $k_2=N-2$ найдем критическое значение $F_{\text{кр}}$.

Если

$$F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}, \quad (1.9)$$

нулевая гипотеза отклоняется, что значит, на генеральной совокупности коэффициент детерминации также отличен от нуля.

2.2 Корреляционный анализ (линейный одномерный случай)

Главная задача корреляционного анализа – по данным эксперимента установить наличие связи между двумя и более параметрами, описать силу и направление этой связи.

2.2.1 Нахождение и анализ коэффициента корреляции

Рассмотрим два набора экспериментальных данных - параметры $X = \{x_i\}_{i=1}^N$ и $Y = \{y_i\}_{i=1}^N$. Построим по этим данным диаграмму рассеяния, как это было сделано в п. 2.1.1. В корреляционном анализе такой график иногда называется корреляционным полем.

Если можно сказать, что расположение точек на диаграмме рассеяния носит линейный характер, тогда силу и направление связи в области $[x_{\min}, x_{\max}]$ можно измерить при помощи коэффициента корреляции

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (1.10)$$

где \bar{x}, \bar{y} - средние значения параметров, вычисляющиеся по формуле типа (1.7).

При малых объемах векторов X и Y проводится корректировка значения коэффициента корреляции.

О направлении связи между переменными x и y говорит знак r . Если $r > 0$, связь положительная, то есть при увеличении значения x в области

$[x_{\min}, x_{\max}]$ значение y также увеличивается. Если $r < 0$, связь отрицательная, то есть при увеличении значения x значение y уменьшается.

О силе связи между параметрами x и y говорит модуль значения r . Классификация силы линейной корреляционной связи приведена в таблице 1.

Таблица 1

Значение r	Сила связи
$ r = 1$	функциональная
$0,7 \leq r < 1$	сильная
$0,5 \leq r \leq 0,7$	умеренная
$0,3 \leq r \leq 0,5$	слабая
$0 < r \leq 0,3$	практически отсутствует
$ r = 0$	отсутствует

После нахождения r можно записать уравнение регрессии y на x вида (1.3), где

$$a = r \frac{s_y}{s_x}, \quad b = \left(\bar{y} - r \frac{s_y}{s_x} \bar{x} \right), \quad (1.11)$$

где s_x, s_y – выборочные среднеквадратичные отклонения (СКО) для x и y , которые можно вычислить по формуле типа

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}. \quad (1.12)$$

Таким образом, для нахождения коэффициента линейной корреляции, его анализа и записи уравнения регрессии необходимо:

а) построить диаграмму рассеяния, убедиться, что расположение точек (x_i, y_i) носит линейный характер;

б) по значениям параметров посчитать $\bar{x}, \bar{y}, \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2, \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$ и $\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$; рассчитать r ;

в) сделать вывод о силе и направлении связи;

г) найти s_x и s_y записать уравнение регрессии y на x в явном виде, построить его на диаграмме рассеяния.

2.2.2 Проверка значимости коэффициента корреляции

Для проверки значимости генерального коэффициента корреляции (то есть того, что на генеральной совокупности коэффициент корреляции отличен от нуля), воспользуемся алгоритмом проверки статистических гипотез.

Выдвинем нулевую гипотезу о незначимости генерального коэффициента корреляции:

$$H_0: r_{ГС} = 0$$

По выборке рассчитаем значение статистики

$$t_{\text{набл}} = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}}. \quad (1.13)$$

Зададимся уровнем значимости α (обычно $\alpha = 0,05$) и по таблице значений распределения Стьюдента найдем критическое значение $t_{\text{кр}} = t(\alpha, N-2)$.

Если

$$|t_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}}, \quad (1.14)$$

нулевая гипотеза отклоняется, что значит, на генеральной совокупности коэффициент корреляции также отличен от нуля.

2.3 Дисперсионный анализ (однофакторный одномерный случай)

Главная задача дисперсионного анализа — по данным экспериментов установить значимость влияния фактора (или факторов) на отклик (отклики). Для этого проводится ряд экспериментов на разных уровнях фактора.

Дисперсионный анализ предваряется анализом исходных данных по нескольким параметрам, одной из самых важных является проверка равенства дисперсий.

2.3.1 Проверка равенства дисперсий

При равном числе экспериментов на каждом уровне фактора (объеме группы) равенство дисперсий можно проверить по критерию Кохрена.

Пусть есть M групп $X_1 = \{x_{i1}\}_{i=1}^N$, $X_2 = \{x_{i2}\}_{i=1}^N$, ..., $X_m = \{x_{im}\}_{i=1}^N$.

Рассчитаем выборочные групповые дисперсии s_j^2 для каждой группы по формуле

$$s_j = \frac{\sum_{i=1}^N (x_{i1} - \bar{x}_j)^2}{N-1}. \quad (1.15)$$

Среднее значение \bar{x}_j для каждой группы рассчитывается по формуле типа (1.7).

Выдвинем нулевую гипотезу о равенстве генеральных групповых дисперсий:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_M^2$$

По выборочным значениям s_i рассчитаем значение статистики

$$g_{\text{набл}} = \frac{\max s_j^2}{\sum_{j=1}^M s_j^2}. \quad (1.16)$$

Зададимся уровнем значимости α (обычно $\alpha = 0,05$) и по таблице значений распределения Кохрена найдем критическое значение $g_{\text{кр}}$ в зависимости от числа групп и объема групп.

Если

$$g_{\text{набл}} \leq g_{\text{кр}}, \quad (1.17)$$

нулевая гипотеза принимается.

2.3.2 Анализ данных

После проверки исходные данные запишем в статистическую таблицу следующего вида, показанного на рисунке 2. Средние значения для каждой группы, \bar{x}_j , записываются снизу.

		уровни фактора			
номера эксперимента ↓		F_1	F_2	...	F_M
		x_{11}	x_{12}	...	x_{1M}
		x_{21}	x_{22}	...	x_{2M}
	
		x_{N1}	x_{N2}	...	x_{NM}
		\bar{x}_1	\bar{x}_2	...	\bar{x}_M
		средние значения в группах			

Рисунок 2

Рассчитывается среднее общее по формуле

$$\bar{x}_t = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \bar{x}_j. \quad (1.18)$$

Рассчитываются суммы квадратов отклонений

- межгрупповая

$$SS_B = N \sum_{j=1}^M (\bar{x}_j - \bar{x}_t)^2; \quad (1.19)$$

- внутригрупповая

$$SS_W = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (x_{ij} - \bar{x}_j)^2. \quad (1.20)$$

Рассчитываются оценки общей дисперсии

- между групп

$$MS_B = \frac{SS_B}{M-1}; \quad (1.21)$$

- внутри групп

$$MS_W = \frac{SS_W}{M(N-1)}. \quad (1.22)$$

Выдвигается нулевая гипотеза о равенстве математических ожиданий x_1, x_2, \dots, x_M . Эти величины можно рассматривать как средние x_1, x_2, \dots, x_M на генеральной совокупности. Если гипотеза принимается, то фактор F не оказывает существенное воздействие на отклик.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_M$$

По рассчитанным ранее значениям вычислим значение статистики

$$F_{\text{набл}} = \frac{MS_B}{MS_W}. \quad (1.23)$$

Зададимся уровнем значимости α (обычно $\alpha = 0,05$) и по таблицам значений распределения Фишера для α по числу степеней свободы $k_1=M-1, k_2=M(N-1)$ найдем критическое значение $F_{\text{кр}}$.

Если

$$F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}, \quad (1.24)$$

нулевая гипотеза отклоняется; это значит, что фактор оказывает существенное воздействие на отклик.

Таким образом, для проведения дисперсионного анализа необходимо:

- а) записать статистическую таблицу, посчитать \bar{x}_j и внести их в таблицу;
- б) посчитать $\bar{x}_t, SS_B, SS_W, MS_B, MS_W$;
- в) выдвинуть и проверить нулевую гипотезу дисперсионного анализа.

3 Выполнение работы

3.1 Выбор варианта работы

Задания контрольных работ составлены по стовариантной системе и приведены в таблицах 2 и 3.

Таблица 2 – Номер варианта на контрольную работу

		Последняя цифра зачетной книжки									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Предпоследняя цифра зачетной книжки	0	X-1	X-2	X-3	X-4	X-5	X-6	X-7	X-8	X-9	X-10
	1	Y-1	Y-2	Y-3	Y-4	Y-5	Y-6	Y-7	Y-8	Y-9	Y-10
	2	Z-1	Z-2	Z-3	Z-4	Z-5	Z-6	Z-7	Z-8	Z-9	Z-10
	3	X-4	X-5	X-6	X-7	X-8	X-9	X-10	X-1	X-2	X-3
	4	Y-4	Y-5	Y-6	Y-7	Y-8	Y-9	Y-10	Y-1	Y-2	Y-3
	5	Z-4	Z-5	Z-6	Z-7	Z-8	Z-9	Z-10	Z-1	Z-2	Z-3
	6	X-7	X-8	X-9	X-10	X-1	X-2	X-3	X-4	X-5	X-6
	7	Y-7	Y-8	Y-9	Y-10	Y-1	Y-2	Y-3	Y-4	Y-5	Y-6
	8	Z-7	Z-8	Z-9	Z-10	Z-1	Z-2	Z-3	Z-4	Z-5	Z-6
	9	X-10	X-9	X-8	X-7	X-6	X-5	X-4	X-3	X-2	X-1

Таблица 3 – Тип задания (X, Y, Z)

Метка	Учебный год	Зимняя сессия	Летняя сессия
X	20_0-20_1	регрессионный	корреляционный
	20_1-20_2	дисперсионный	регрессионный
	20_2-20_3	корреляционный	дисперсионный
	20_3-20_4	регрессионный	корреляционный
	20_4-20_5	дисперсионный	регрессионный
	20_5-20_6	корреляционный	дисперсионный
	20_6-20_7	регрессионный	корреляционный
	20_7-20_8	дисперсионный	регрессионный
	20_8-20_9	корреляционный	дисперсионный
	20_9-20_0	дисперсионный	регрессионный
Y	20_0-20_1	корреляционный	дисперсионный
	20_1-20_2	регрессионный	корреляционный
	20_2-20_3	дисперсионный	регрессионный
	20_3-20_4	корреляционный	дисперсионный

Метка	Учебный год	Зимняя сессия	Летняя сессия
	20_4-20_5	регрессионный	корреляционный
	20_5-20_6	дисперсионный	регрессионный
	20_6-20_7	корреляционный	дисперсионный
	20_7-20_8	регрессионный	корреляционный
	20_8-20_9	дисперсионный	регрессионный
	20_9-20_0	регрессионный	корреляционный
Z	20_0-20_1	дисперсионный	регрессионный
	20_1-20_2	корреляционный	дисперсионный
	20_2-20_3	регрессионный	корреляционный
	20_3-20_4	дисперсионный	регрессионный
	20_4-20_5	корреляционный	дисперсионный
	20_5-20_6	регрессионный	корреляционный
	20_6-20_7	дисперсионный	регрессионный
	20_7-20_8	корреляционный	дисперсионный
	20_8-20_9	регрессионный	корреляционный
	20_9-20_0	корреляционный	дисперсионный

3.2 Пример выполнения задания

3.2.1 Регрессионный анализ

По экспериментальным значениям фактора X и отклика Y найти уравнение регрессии и проверить его значимость на уровне значимости $\alpha=0,01$.

$X = \{-3,5 \quad -3 \quad -2,5 \quad -2 \quad -1,5 \quad -1 \quad -0,5 \quad 0 \quad 0,5 \quad 1 \quad 1,5 \quad 2 \quad 2,5 \quad 3 \quad 3,5 \quad 4 \quad 4,5 \quad 5 \quad 5,5 \quad 6\}$

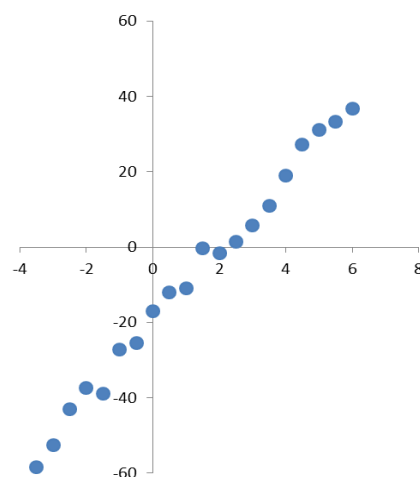
$Y = \{-58,4 \quad -52,5 \quad -43 \quad -37,3 \quad -39 \quad -27,3 \quad -25,5 \quad -17 \quad -12 \quad -11 \quad -0,4 \quad -1,7 \quad 1,5 \quad 5,7 \quad 11 \quad 18,9 \quad 27,2 \quad 31,2 \quad 33,2 \quad 36,7\}$

Построим диаграмму рассеяния (см. справа). Расположение точек (x_i, y_i) носит почти линейный характер.

Ищем уравнение регрессии в виде

$$y(x) = ax + b.$$

Для нахождения a и b рассчитаем ряд значений:



$$\sum_{i=1}^N x_i = 25;$$

$$\sum_{i=1}^N y_i = -159,7;$$

$$\sum_{i=1}^N x_i^2 = (-3,5)^2 + (-3)^2 + \dots + (6)^2 = 197,5;$$

$$\sum_{i=1}^N x_i y_i = (-3,5) \cdot (-58,4) + (-3) \cdot (-52,5) + \dots + 6 \cdot 36,7 = 1437,7.$$

Запишем СЛАУ:

$$\begin{cases} 25a + 20b = -159,7, \\ 197,5a + 25b = 1437,7. \end{cases}$$

Решим СЛАУ методом Крамера.

Определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 25 & 20 \\ 197,5 & 25 \end{vmatrix} = -3325;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -159,7 & 20 \\ 1437,7 & 25 \end{vmatrix} = -32746,5; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 25 & -159,7 \\ 197,5 & 1437,7 \end{vmatrix} = 67483,25;$$

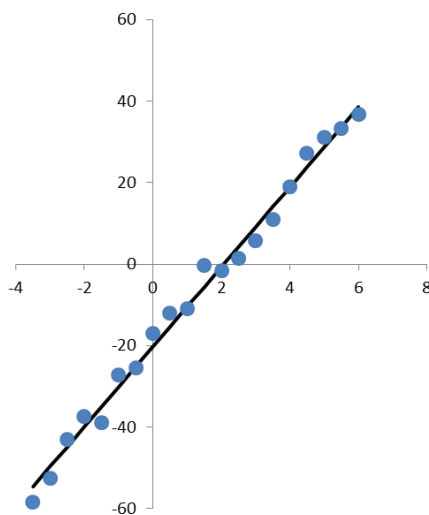
отсюда

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 9,8, \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -20,3.$$

Таким образом,

$$y(x) = 9,8x - 20,3.$$

Регрессионная прямая на диаграмме рассеяния приведена на рисунке.



Проверим значимость уравнения регрессии.

Рассчитаем выборочный коэффициент детерминации. Для этого

- рассчитаем значения $9,8x - 20,3$ для исходных значений фактора (X):

$$9,8 \cdot (-3,5) - 20,3 = -54,6,$$

$$9,8 \cdot (-3) - 20,3 = -49,7,$$

...

$$9,8 \cdot 6 - 20,3 = 38,5;$$

- рассчитаем значения $\sum_{i=1}^N ((ax_i + b_i) - y_i)^2$:

$$\sum_{i=1}^N ((ax_i + b_i) - y_i)^2 = ((-54,6) - (-58,4))^2 + ((-49,7) - (-52,5))^2 + \dots +$$

$$+ (38,5 - 36,7)^2 = 156,01;$$

- рассчитаем значение \bar{y} :

$$\bar{y} = \frac{1}{20} \cdot (-159,7) = -8,0;$$

- рассчитаем значения $\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$:

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = 16280,85.$$

Таким образом,

$$R^2 = 1 - \frac{156,01}{16280,85} = 0,99.$$

Проверка значимости уравнения регрессии:

$$H_0: R_{\text{ГС}}^2 = 0$$

Рассчитаем значение статистики

$$F_{\text{набл}} = \frac{0,99}{1 - 0,99} \cdot (20 - 2) = 1782.$$

По таблице значений распределения Фишера для $\alpha = 0,01$ по числу степеней свободы $k_1=1, k_2=18$

$$F_{\text{кр}} = 8,28.$$

Условие $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$ выполняется, то есть нулевая гипотеза отклоняется, что значит, на генеральной совокупности коэффициент детерминации также отличен от нуля, а уравнение регрессии - значимо.

Ответ: уравнение регрессии $y(x) = 9,8x - 20,3$; оно значимо на генеральной совокупности.

3.2.2 Корреляционный анализ

Определить характер и силу связи параметра X и параметра Y по экспериментальным данным. Записать уравнение регрессии. Проверить значимость генерального коэффициента линейной корреляции на уровне значимости $\alpha=0,01$.

$$X = \{ -4,9 \quad -4,3 \quad -4,1 \quad -3,3 \quad -2,1 \quad -1,6 \quad -1,4 \quad -1,3 \quad -0,4 \quad 0,6 \quad 0,6 \quad 1 \quad 2,2 \\ 2,5 \quad 2,7 \quad 2,9 \quad 3,1 \quad 4,9 \quad 4,9 \quad 5 \}$$

$$Y = \{ -69,7 \quad -65,2 \quad -56,2 \quad -49,5 \quad -38,9 \quad -40,9 \quad -29,2 \quad -33 \quad -19,7 \quad -15,7 \quad -12,8 \quad -13,6 \quad 2,2 \\ 8,8 \quad 9,8 \quad 4,2 \quad 8,1 \quad 26,6 \quad 30,2 \quad 30,1 \}$$

Построим диаграмму рассеяния (см. справа). Расположение точек (x_i, y_i) носит почти линейный характер.

Для нахождения r рассчитаем ряд значений:

$$\bar{x} = \frac{1}{20}((-4,9) + (-4,3) + \dots + 5) = 0,35;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{20}((-69,7) + (-65,2) + \dots + 30,1) = -16,22;$$

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = (-4,9 - 0,35)^2 + (-4,3 - 0,35)^2 + \dots + (5 - 0,35)^2 = 189,62;$$

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = ((-69,7) - (-16,22))^2 + ((-65,2) - (-16,22))^2 + \dots + (30,1 - (-16,22))^2 = 18354,27;$$

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (-4,9 - 0,35) \cdot ((-69,7) - (-16,22)) + (-4,3 - 0,35) \times \\ \times ((-65,2) - (-16,22)) + \dots + (5 - 0,35) \cdot (30,1 - (-16,22)) = 1856,72.$$

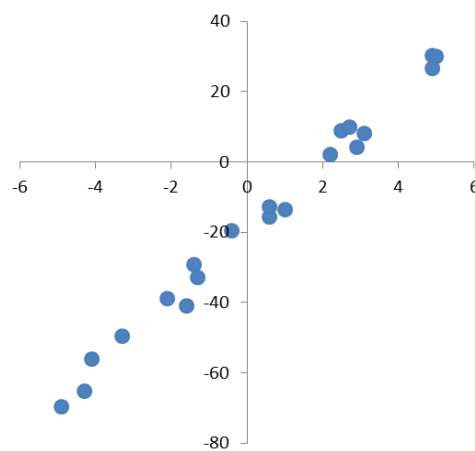
Таким образом,

$$r = \frac{1856,72}{\sqrt{189,62 \cdot 18354,27}} = 0,995.$$

Исходя из анализа значения коэффициента корреляции, можно сказать, что между параметрами наблюдается сильная положительная связь.

Для нахождения уравнения регрессии y на x найдем следующие значения:

$$s_x = \sqrt{\frac{189,62}{20-1}} = 3,16; \quad s_y = \sqrt{\frac{18354,27}{20-1}} = 31,08,$$



тогда коэффициенты регрессии будут равны

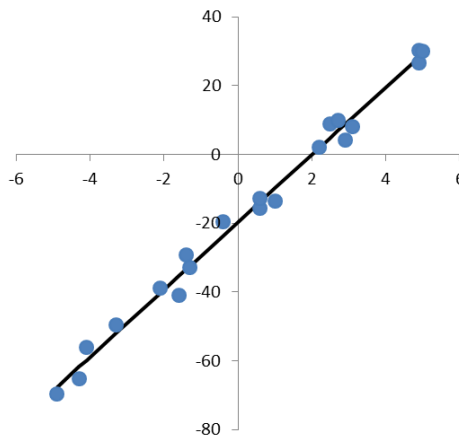
$$a = 0,995 \cdot \frac{31,08}{3,18} = 9,79;$$

$$b = -16,22 - 0,995 \cdot \frac{31,08}{3,18} \cdot 0,35 = -19,65.$$

Таким образом, уравнение регрессии y на x

$$y = 9,79x - 19,65.$$

Регрессионная прямая на диаграмме рассеяния приведена на рисунке.



Проверим значимость коэффициента корреляции.

$$H_0: r_{TC} = 0$$

Рассчитаем значение статистики

$$t_{\text{набл}} = \frac{0,995\sqrt{20-2}}{\sqrt{1-0,995^2}} = 179,32.$$

Зададимся уровнем значимости $\alpha = 0,01$. По таблице значений распределения Стьюдента $t_{\text{кр}} = t(0,01;18) = 2,878$.

Условие $|t_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}}$ выполняется, следовательно, генеральный коэффициент корреляции отличен от нуля.

Ответ: выборочное значение коэффициента корреляции равно 0,995, то есть между параметрами наблюдается сильная положительная связь. Уравнение регрессии $y = 9,79x - 19,65$. Генеральный коэффициент корреляции отличен от нуля.

3.2.3 Дисперсионный анализ

По экспериментальным данным выяснить, имеет ли фактор *A* существенное влияние на параметр *B* исследуемого объекта. Предварительно провести проверку равенства групповых дисперсий. Уровень значимости считать равным $\alpha=0,01$.

Значения параметра *B*:

на уровне *A1*:

{0,22 1,42 0,15 0,13 0,91 -0,52 1,45 1,54 2,25 2,02 0,23 2,21 1,79
2,36 1,7 1,93 -1,03 0,13 0,46 1,87}

на уровне *A2*:

{2,3 3,47 1,35 4,08 0,87 0,41 0,76 1,1 3,23 1,32 5,46 2,97 3,67
4,56 5,35 3,24 2,44 1,55 4,88 3,56}

на уровне *A3*:

{3,42 3,86 5,21 3,72 4,87 4,69 5,1 6,8 5,46 4,73 5,43 3,66 3,67
5,38 3,95 5,76 4,42 5,23 5,64 4,24}

на уровне *A4*

{9,57 5,85 7,4 7,29 8,18 5,33 7,54 6,82 9,03 5,81 9,36 6,67 6,8
9,66 5,15 7,14 3,98 8,21 8,52 8,6}

на уровне *A5*

{7,23 8,21 6,57 9,19 8,6 9,16 9,43 7,9 8,5 7,39 9,01 7,71 8,18
7,83 7,07 8,58 6,7 8,83 7,78 9,48}

Запишем исходные данные в статистическую таблицу, внесем в нее групповые средние:

A1	A2	A3	A3	A5
0,22	2,3	3,42	9,57	7,23
1,42	3,47	3,86	5,85	8,21
0,15	1,35	5,21	7,4	6,57
0,13	4,08	3,72	7,29	9,19
0,91	0,87	4,87	8,18	8,6
-0,52	0,41	4,69	5,33	9,16
1,45	0,76	5,1	7,54	9,43
1,54	1,1	6,8	6,82	7,9
2,25	3,23	5,46	9,03	8,5
2,02	1,32	4,73	5,81	7,39
0,23	5,46	5,43	9,36	9,01
2,21	2,97	3,66	6,67	7,71
1,79	3,67	3,67	6,8	8,18
2,36	4,56	5,38	9,66	7,83

	A1	A2	A3	A3	A5
	1,7	5,35	3,95	5,15	7,07
	1,93	3,24	5,76	7,14	8,58
	-1,03	2,44	4,42	3,98	6,7
	0,13	1,55	5,23	8,21	8,83
	0,46	4,88	5,64	8,52	7,78
	1,87	3,56	4,24	8,6	9,48
$\overline{x_j}$	1,06	2,83	4,76	7,35	8,17

Проверим равенства групповых дисперсий. Вычислим выборочные дисперсии:

$$s_1 = \frac{1}{20-1} \left((0,22-1,06)^2 + (1,42-1,06)^2 + \dots + (1,87-1,06)^2 \right) = 1,02;$$

$$s_2 = \frac{1}{20-1} \left((2,3-2,83)^2 + (3,47-2,83)^2 + \dots + (3,56-2,83)^2 \right) = 2,5;$$

$$s_3 = \frac{1}{20-1} \left((3,42-4,76)^2 + (3,86-4,76)^2 + \dots + (4,24-4,76)^2 \right) = 0,79;$$

$$s_4 = \frac{1}{20-1} \left((9,57-7,35)^2 + (5,85-7,35)^2 + \dots + (8,6-7,35)^2 \right) = 2,5;$$

$$s_5 = \frac{1}{20-1} \left((7,23-8,17)^2 + (8,21-8,17)^2 + \dots + (9,48-8,17)^2 \right) = 0,78.$$

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_5^2$$

Рассчитаем значение статистики

$$g_{\text{набл}} = \frac{2,5}{1,02 + 2,5 + 0,79 + 2,5 + 0,78} = \frac{2,5}{7,59} = 0,33.$$

Зададимся уровнем значимости $\alpha = 0,01$. По таблице значений распределения Кохрена $g_{\text{кр}} = 0,3907$.

Условие $g_{\text{набл}} \leq g_{\text{кр}}$ соблюдается, нулевая гипотеза принимается, генеральные групповые дисперсии равны.

Для проведения дисперсионного анализа найдем следующие значения:

$$\overline{x_t} = \frac{1}{5} \cdot (1,06 + 2,83 + \dots + 8,17) = 4,83;$$

$$SS_B = 20 \cdot \left((1,06 - 4,83)^2 + \dots + (8,17 - 4,83)^2 \right) = 714,4;$$

$$SS_W = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (x_{ij} - \overline{x_j})^2 = (0,22-1,06)^2 + (1,42-1,06)^2 + \dots + (1,87-1,06)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + (2,3 - 2,83)^2 + (3,47 - 2,83)^2 + \dots + (3,56 - 2,83)^2 (3,42 - 4,76)^2 + (3,86 - 4,76)^2 + \\
& + \dots + (4,24 - 4,76)^2 + (9,57 - 7,35)^2 + (5,85 - 7,35)^2 + \dots + (8,6 - 7,35)^2 + \\
& + (7,23 - 8,17)^2 + (8,21 - 8,17)^2 + \dots + (9,48 - 8,17)^2 = 144,31;
\end{aligned}$$

$$MS_B = \frac{714,4}{5-1} = 178,6;$$

$$MS_W = \frac{144,31}{5(20-1)} = 1,52.$$

Выдвигаем гипотезу о незначимости влияния фактора A на отклик B :

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_M$$

Рассчитаем значение статистики

$$F_{\text{набл}} = \frac{178,6}{1,52} = 117,57.$$

По таблице значений распределения Фишера для $\alpha = 0,01$ по числу степеней свободы $k_1 = 5 - 1 = 4$, $k_2 = 5(20 - 1)$

$$F_{\text{кр}} = 3,52.$$

Условие $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$ выполняется, то есть нулевая гипотеза отклоняется. Это значит, что фактор A оказывает существенное влияние на отклик B .

Ответ: генеральные групповые дисперсии данных равны. Фактор A оказывает существенное влияние на отклик B .

4 Задания на контрольную работу

4.1 Регрессионный анализ

По экспериментальным значениям фактора X и отклика Y найти уравнение регрессии и проверить его значимость на уровне значимости $\alpha=0,05$.

Данные по вариантам:

1)

$X = \{-2 \quad -1,5 \quad -1 \quad -0,5 \quad 0 \quad 0,5 \quad 1 \quad 1,5 \quad 2 \quad 2,5 \quad 3 \quad 3,5 \quad 4$
 $4,5 \quad 5 \quad 5,5 \quad 6 \quad 6,5 \quad 7 \quad 7,5\}$
 $Y = \{18,6 \quad 16,5 \quad 18 \quad 15,7 \quad 6 \quad 9,7 \quad 3,5 \quad 4 \quad 1 \quad -6 \quad -3,4 \quad -12,7$
 $-17,5 \quad -21,3 \quad -24 \quad -24,1 \quad -23,8 \quad -27,8 \quad -33,8 \quad -38,3\}$

2)

$X = \{2 \quad 2,5 \quad 3 \quad 3,5 \quad 4 \quad 4,5 \quad 5 \quad 5,5 \quad 6 \quad 6,5 \quad 7 \quad 7,5 \quad 8$
 $8,5 \quad 9 \quad 9,5 \quad 10 \quad 10,5 \quad 11 \quad 11,5\}$
 $Y = \{-4,4 \quad -3 \quad 2 \quad 3,2 \quad -3 \quad 4,2 \quad 1,5 \quad 5,5 \quad 6 \quad 2,5 \quad 8,6 \quad 2,8 \quad 1,5$
 $1,2 \quad 2 \quad 5,4 \quad 9,2 \quad 8,7 \quad 6,2 \quad 5,2\}$

3)

$X = \{-1 \quad -0,5 \quad 0 \quad 0,5 \quad 1 \quad 1,5 \quad 2 \quad 2,5 \quad 3 \quad 3,5 \quad 4 \quad 4,5 \quad 5$
 $5,5 \quad 6 \quad 6,5 \quad 7 \quad 7,5 \quad 8 \quad 8,5\}$
 $Y = \{-13,4 \quad -6,5 \quad 4 \quad 10,7 \quad 10 \quad 22,7 \quad 25,5 \quad 35 \quad 41 \quad 43 \quad 54,6 \quad 54,3$
 $58,5 \quad 63,7 \quad 70 \quad 78,9 \quad 88,2 \quad 93,2 \quad 96,2 \quad 100,7\}$

4)

$X = \{-4 \quad -3,5 \quad -3 \quad -2,5 \quad -2 \quad -1,5 \quad -1 \quad -0,5 \quad 0 \quad 0,5 \quad 1 \quad 1,5 \quad 2$
 $2,5 \quad 3 \quad 3,5 \quad 4 \quad 4,5 \quad 5 \quad 5,5\}$
 $Y = \{-22,4 \quad -19 \quad -12 \quad -8,8 \quad -13 \quad -3,8 \quad -4,5 \quad 1,5 \quad 4 \quad 2,5 \quad 10,6 \quad 6,8 \quad 7,5$
 $9,2 \quad 12 \quad 17,4 \quad 23,2 \quad 24,7 \quad 24,2 \quad 25,2\}$

5)

$X = \{-2 \quad -1,5 \quad -1 \quad -0,5 \quad 0 \quad 0,5 \quad 1 \quad 1,5 \quad 2 \quad 2,5 \quad 3 \quad 3,5 \quad 4$
 $4,5 \quad 5 \quad 5,5 \quad 6 \quad 6,5 \quad 7 \quad 7,5\}$
 $Y = \{-25,4 \quad -18,5 \quad -8 \quad -1,3 \quad -2 \quad 10,7 \quad 13,5 \quad 23 \quad 29 \quad 31 \quad 42,6 \quad 42,3$
 $46,5 \quad 51,7 \quad 58 \quad 66,9 \quad 76,2 \quad 81,2 \quad 84,2 \quad 88,7\}$

6)

$X = \{2 \quad 2,5 \quad 3 \quad 3,5 \quad 4 \quad 4,5 \quad 5 \quad 5,5 \quad 6 \quad 6,5 \quad 7 \quad 7,5 \quad 8$
 $\quad 8,5 \quad 9 \quad 9,5 \quad 10 \quad 10,5 \quad 11 \quad 11,5\}$
 $Y = \{-13,4 \quad -14,5 \quad -12 \quad -13,3 \quad -22 \quad -17,3 \quad -22,5 \quad -21 \quad -23 \quad -29 \quad -25,4 \quad -33,7$
 $\quad -37,5 \quad -40,3 \quad -42 \quad -41,1 \quad -39,8 \quad -42,8 \quad -47,8 \quad -51,3\}$

7)

$X = \{-4 \quad -3,5 \quad -3 \quad -2,5 \quad -2 \quad -1,5 \quad -1 \quad -0,5 \quad 0 \quad 0,5 \quad 1 \quad 1,5 \quad 2$
 $\quad 2,5 \quad 3 \quad 3,5 \quad 4 \quad 4,5 \quad 5 \quad 5,5\}$
 $Y = \{-4,4 \quad -3 \quad 2 \quad 3,2 \quad -3 \quad 4,2 \quad 1,5 \quad 5,5 \quad 6 \quad 2,5 \quad 8,6 \quad 2,8 \quad 1,5$
 $\quad 1,2 \quad 2 \quad 5,4 \quad 9,2 \quad 8,7 \quad 6,2 \quad 5,2\}$

8)

$X = \{-1 \quad -0,5 \quad 0 \quad 0,5 \quad 1 \quad 1,5 \quad 2 \quad 2,5 \quad 3 \quad 3,5 \quad 4 \quad 4,5 \quad 5$
 $\quad 5,5 \quad 6 \quad 6,5 \quad 7 \quad 7,5 \quad 8 \quad 8,5\}$
 $Y = \{-7,4 \quad -4 \quad 3 \quad 6,2 \quad 2 \quad 11,2 \quad 10,5 \quad 16,5 \quad 19 \quad 17,5 \quad 25,6 \quad 21,8$
 $\quad 22,5 \quad 24,2 \quad 27 \quad 32,4 \quad 38,2 \quad 39,7 \quad 39,2 \quad 40,2\}$

9)

$X = \{-2 \quad -1,5 \quad -1 \quad -0,5 \quad 0 \quad 0,5 \quad 1 \quad 1,5 \quad 2 \quad 2,5 \quad 3 \quad 3,5 \quad 4$
 $\quad 4,5 \quad 5 \quad 5,5 \quad 6 \quad 6,5 \quad 7 \quad 7,5\}$
 $Y = \{2,6 \quad 1,5 \quad 4 \quad 2,7 \quad -6 \quad -1,3 \quad -6,5 \quad -5 \quad -7 \quad -13 \quad -9,4 \quad -17,7$
 $\quad -21,5 \quad -24,3 \quad -26 \quad -25,1 \quad -23,8 \quad -26,8 \quad -31,8 \quad -35,3\}$

10)

$X = \{2 \quad 2,5 \quad 3 \quad 3,5 \quad 4 \quad 4,5 \quad 5 \quad 5,5 \quad 6 \quad 6,5 \quad 7 \quad 7,5 \quad 8$
 $\quad 8,5 \quad 9 \quad 9,5 \quad 10 \quad 10,5 \quad 11 \quad 11,5\}$
 $Y = \{22,6 \quad 29,5 \quad 40 \quad 46,7 \quad 46 \quad 58,7 \quad 61,5 \quad 71 \quad 77 \quad 79 \quad 90,6 \quad 90,3$
 $\quad 94,5 \quad 99,7 \quad 106 \quad 114,9 \quad 124,2 \quad 129,2 \quad 132,2 \quad 136,7\}$

4.2 Корреляционный анализ

Определить характер и силу связи параметра X и параметра Y по экспериментальным данным. Записать уравнение регрессии. Проверить значимость генерального коэффициента линейной корреляции на уровне значимости $\alpha=0,05$.

Данные по вариантам:

1)

$$X = \{-2, -1,5, -1, -0,5, 0, 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, 4, 4,5, 5, 5,5, 6, 6,5, 7, 7,5\}$$

$$Y = \{18,6, 16,5, 18, 15,7, 6, 9,7, 3,5, 4, 1, -6, -3,4, -12,7, -17,5, -21,3, -24, -24,1, -23,8, -27,8, -33,8, -38,3\}$$

2)

$$X = \{2, 2,5, 3, 3,5, 4, 4,5, 5, 5,5, 6, 6,5, 7, 7,5, 8, 8,5, 9, 9,5, 10, 10,5, 11, 11,5\}$$

$$Y = \{-4,4, -3, 2, 3,2, -3, 4,2, 1,5, 5,5, 6, 2,5, 8,6, 2,8, 1,5, 1,2, 2, 5,4, 9,2, 8,7, 6,2, 5,2\}$$

3)

$$X = \{-1, -0,5, 0, 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, 4, 4,5, 5, 5,5, 6, 6,5, 7, 7,5, 8, 8,5\}$$

$$Y = \{-13,4, -6,5, 4, 10,7, 10, 22,7, 25,5, 35, 41, 43, 54,6, 54,3, 58,5, 63,7, 70, 78,9, 88,2, 93,2, 96,2, 100,7\}$$

4)

$$X = \{-4, -3,5, -3, -2,5, -2, -1,5, -1, -0,5, 0, 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, 4, 4,5, 5, 5,5\}$$

$$Y = \{-22,4, -19, -12, -8,8, -13, -3,8, -4,5, 1,5, 4, 2,5, 10,6, 6,8, 7,5, 9,2, 12, 17,4, 23,2, 24,7, 24,2, 25,2\}$$

5)

$$X = \{-2, -1,5, -1, -0,5, 0, 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, 4, 4,5, 5, 5,5, 6, 6,5, 7, 7,5\}$$

$$Y = \{-25,4, -18,5, -8, -1,3, -2, 10,7, 13,5, 23, 29, 31, 42,6, 42,3, 46,5, 51,7, 58, 66,9, 76,2, 81,2, 84,2, 88,7\}$$

6)

$$X = \{2, 2,5, 3, 3,5, 4, 4,5, 5, 5,5, 6, 6,5, 7, 7,5, 8, 8,5, 9, 9,5, 10, 10,5, 11, 11,5\}$$

$$Y = \{-13,4, -14,5, -12, -13,3, -22, -17,3, -22,5, -21, -23, -29, -25,4, -33,7, -37,5, -40,3, -42, -41,1, -39,8, -42,8, -47,8, -51,3\}$$

7)

$$X = \{-4, -3,5, -3, -2,5, -2, -1,5, -1, -0,5, 0, 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, 4, 4,5, 5, 5,5\}$$

Y = { -4,4 -3 2 3,2 -3 4,2 1,5 5,5 6 2,5 8,6 2,8 1,5
1,2 2 5,4 9,2 8,7 6,2 5,2 }

8)

X = { -1 -0,5 0 0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4 4,5 5
5,5 6 6,5 7 7,5 8 8,5 }

Y = { -7,4 -4 3 6,2 2 11,2 10,5 16,5 19 17,5 25,6 21,8
22,5 24,2 27 32,4 38,2 39,7 39,2 40,2 }

9)

X = { -2 -1,5 -1 -0,5 0 0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4
4,5 5 5,5 6 6,5 7 7,5 }

Y = { 2,6 1,5 4 2,7 -6 -1,3 -6,5 -5 -7 -13 -9,4 -17,7
-21,5 -24,3 -26 -25,1 -23,8 -26,8 -31,8 -35,3 }

10)

X = { 2 2,5 3 3,5 4 4,5 5 5,5 6 6,5 7 7,5 8
8,5 9 9,5 10 10,5 11 11,5 }

Y = { 22,6 29,5 40 46,7 46 58,7 61,5 71 77 79 90,6 90,3
94,5 99,7 106 114,9 124,2 129,2 132,2 136,7 }

4.3 Дисперсионный анализ

По экспериментальным данным выяснить, имеет ли фактор А существенное влияние на параметр В исследуемого объекта. Предварительно провести проверку равенства групповых дисперсий. Уровень значимости считать равным $\alpha=0,05$.

Значения параметра В:

1)

на уровне А1:

{ 1,44 3 4,23 1,94 3,01 1,24 1,63 1,9 1,18 1,88 2,45 3,16
1,09 4,05 2,75 1,53 2,29 1,91 2,5 2,97 }

на уровне А2:

{ 2,15 2,36 2,26 4,19 3,07 2,14 2,42 1,15 4,79 4,48 3,56 3,72
2,45 2,89 3,34 3,7 2,25 3,26 3,5 3,25 }

на уровне А3:

{ 3,49 4,22 3,78 1,91 4,24 3,75 4,33 3,96 3,46 3,66 4,05 3,14
3,42 2,87 3,93 3,76 3,66 3,64 3,22 3,01 }

на уровне А4

{ 5,49 3,18 5,57 5,36 4,22 3,39 4,11 3,66 5,17 2,95 4,84 3,56
3,49 5 4,78 4,23 2,63 4,62 3,91 3,29}

на уровне А5

{ 3,5 4,74 4,51 4,88 5,11 5,46 5,71 6,3 4,3 5,59 6 4,52 4,44
5,35 4 5,27 5,19 3,94 5,53 4,74}

2)

на уровне А1:

{ 8,3 10,63 9,58 8,05 11,97 10,39 8,72 9,72 10,63 9,58
8,67 10,75 8,45 12,79 10,11 10,3 10,03 9,29 9,67 8,07}

на уровне А2:

{ 9,77 9,34 10,27 9,69 11,03 9,82 11,2 7,43 10,73 11,29
10,1 10,4 10,58 11,03 11 11,04 9,93 10,92 12,3 11,15}

на уровне А3:

{ 9,31 10,48 9,48 9,87 10,52 10,19 11,22 10,81 10,32 9,83 10,25
10,5 11,29 11,1 10,66 9,86 10,95 9,73 9,34 9,87}

на уровне А4

{ 12,16 9,41 10,8 10,34 9,25 11,7 10,64 11,34 9,91 9,01 12,28
8,9 9,09 10,28 10,37 11,26 9,65 10,56 7,81 9,48}

на уровне А5

{ 11,62 8,89 12,95 10,47 10,93 10,62 11,21 9,5 10,57 11,17
12,28 12,17 9,58 7,25 8,29 9,89 10,49 9,92 10,48 9,79}

3)

на уровне А1:

{ 8,35 10,6 8,8 10,81 10,38 8,41 10,95 10,26 10,81 9,16
9,32 11,7 8,12 10,11 10,68 9,55 8,7 7,57 11,33 9,32}

на уровне А2:

{ 7,62 7,36 7,5 8,54 7,35 7,54 8,25 8,68 9,71 11,54 8,64
8,66 7,73 7,46 8,51 8,58 6,56 7,7 8,05 8,3}

на уровне А3:

{ 5,75 7,24 8,04 6,92 8,62 7,47 7,79 7,57 7,27 5,49 6,79 7,23
6,58 6,73 4,98 7,82 6,56 7,88 5,83 8,61}

на уровне А4

{ 6,41 5,58 6,56 7,02 2,93 4,12 5,62 6,35 5,12 4,39 5,64 4,7
4,95 3,45 3,55 4,96 5,38 5,71 4,91 3,01}

на уровне А5

{5,05 4,39 3,74 6,15 4,89 3,93 6,38 5,91 5,72 6 5,85 5,49
4,29 3,06 2,13 6,57 4,61 3,78 5,16 4,1}

4)

на уровне A1:

{7,12 7,89 8,35 7,28 8,02 7,47 6,94 7,28 8,29 8,36 8,56 8,56
6,93 8,03 8,71 7,51 7,58 6,82 7,66 8,17}

на уровне A2:

{6,37 6,99 8,12 7,81 6,9 7,3 6,07 6,47 9,14 9,18 8,43 8,32
7,33 7,18 7,94 7,42 6,43 8,44 8,59 8,01}

на уровне A3:

{5,49 7,57 6,58 6,76 8,29 7,05 7,42 7,28 6,35 6,43 8,2 6,87
7,69 7,83 6,15 8,17 6,63 6,35 6,36 6,39}

на уровне A4

{6,79 6,96 7,82 8,11 8,43 7,71 8,68 7,15 8,42 6,54 7,89 6,75
8,26 8,86 6,6 8,26 6,46 7,45 7,56 6,47}

на уровне A5

{6,45 5,7 8,5 7,43 8,13 7,05 7,88 6,52 6,37 7,72 6,31 6,39
7,11 7,22 6,54 7,21 5,98 6,64 8,01 6,17}

5)

на уровне A1:

{5,61 7,63 5,92 3,78 5,97 7,25 5,37 5,46 6,96 4,12 8,31 6,66 6,01
5,23 8,72 7,49 6,25 5,12 5,71 6,64}

на уровне A2:

{5,21 5,73 5,77 6,42 3,25 5,64 3,97 5,47 7,77 5,69 7,21 4,29 4,28
6,32 5,05 6,36 4,75 3,79 6,73 7,21}

на уровне A3:

{4,3 6,33 7,17 5,71 7,28 6,26 5,4 7,01 4,28 4,66 7,45 3,12 6,76
5,72 6,5 8,21 5 5,1 5,62 2,57}

на уровне A4

{5,89 4,14 5,67 5,8 5,02 4,94 4,8 4,34 5,95 6,49 5,06 4,1 6,58
5,9 4,77 4 6,29 5,66 5,89 4,58}

на уровне A5

{4,66 5,23 7,45 6,29 7,99 6,68 7,29 6,41 7,7 5,21 7,11 6,59 5,85
5,97 6,68 5,02 7,03 6,2 6,97 5,24}

6)

на уровне A1:

{0,7 3,54 2,11 1,79 3,24 1,63 0,99 1,44 3,11 2,61 0,1 2,86 0,67
0,68 2,52 3,01 1,77 2,73 1,56 2,57}

на уровне A2:

{2,55 4,82 3,98 5,06 2,09 2,02 3,04 2,24 6,06 4,71 2,6 1,68 1,87
1,91 2,52 3,21 3,91 1,98 2,42 2,18}

на уровне A3:

{1,48 6,67 2,29 1,27 4,12 3,25 5,39 2,63 0,02 2,91 3,3 3,02 5,04
1,88 3,45 3,03 2,1 3,51 2,56 0,56}

на уровне A4

{2,57 1,59 4,09 2,79 4,34 4,48 3,15 1,11 4,38 1,85 4,65 3,5 3,78
3,91 3 4,37 1,82 4,96 3,54 2,76}

на уровне A5

{4,1 3,53 4,58 7,75 5,22 6,03 7,84 3,13 2,27 8,07 8,11 6,46 5,36
5,29 3,11 7,05 5,43 7,33 4,35 3,95}

7)

на уровне A1:

{6,76 3,66 6,98 6,46 6,79 4,67 6,9 5,01 5,2 7,06 4,55 5,9 6,38
6,42 8,51 4,08 4,78 5,66 7,64 7,14}

на уровне A2:

{2,46 5,94 4,98 8,51 8,77 4,43 8,13 3,73 5,13 6,44 6,27 7,75 6,72
5,73 5,68 6,23 4,34 3,73 7,52 4,65}

на уровне A3:

{6,02 9,5 5,54 6,47 5,62 6,67 5,24 6,77 6,13 5,25 9,7 4,99 9,63
5,63 5,88 3,66 7,7 6,7 4,33 5,01}

на уровне A4

{4,94 6,51 7,94 4,99 4,16 4,7 8,13 8,61 6,24 4,86 7,82 7,39 4,9
8,21 6,92 5,14 5,26 5,23 6,3 6,26}

на уровне A5

{4,66 6,01 6,53 6,23 7,39 4,63 7,71 6,94 4,1 3,93 8,52 6,83 4,79
4,24 3,48 5,1 4,28 5,4 1,06 5,64}

8)

на уровне A1:

{2,76 4,61 7,08 4,12 5,05 2,5 2,51 3,23 4,81 3,98 4,85 3,77 4,27
6,19 5,85 4,11 3,05 1,99 3,9 4,53}

на уровне A2:

{3,67 3,4 2,96 4,22 3,68 3,64 3,87 3,39 4,91 6,14 3,42 5,48 3,41
3,16 4,82 2,06 4,04 3,04 5,3 5,05}

на уровне А3:

{3,5 5,13 3,05 4,28 5,28 4,25 5,71 3,32 5,74 2,71 5,07 4,04 5,6
2,33 4,97 4,4 3,98 5,35 3,34 4,6}

на уровне А4

{3,68 1,37 5,93 4,85 2,97 2,92 4,27 2,92 5,37 3,44 4,32 2,36 2,23
5,15 4,75 4,52 2,76 4,51 4,8 3,69}

на уровне А5

{2,13 3,51 3,92 6,37 4,51 4,89 4,87 6,5 5,12 4,07 3,38 4,22 3,86
5,04 3,15 4,53 5,3 4,32 4,83 3,56}

9)

на уровне А1:

{1,82 6,04 5,52 2,39 6,5 2,86 3,99 3,01 3,66 3,52 7,8 3,95 5,52
4,08 3,73 2,81 4,86 3,01 4,96 4,45}

на уровне А2:

{4,19 5,45 4,91 5,39 5,68 3,24 3,75 3,94 5,79 5,63 4,67 5,02 4,45
6,13 4,85 5,63 4,08 5,62 5,77 4,93}

на уровне А3:

{4,28 5,48 5,83 3,5 5,43 4,22 4,15 6,03 0,97 2,46 4,81 4,13 4,36
2,84 2,4 6,14 4,66 3,94 4,56 2,7}

на уровне А4

{3,31 3,75 5,5 4,46 3,74 2,08 3,5 4,31 3,7 3,05 4,21 4,26 2,71
4,27 3,15 3,17 2,64 4,21 3,51 4,22}

на уровне А5

{4,8 5,63 6,79 7,04 6,02 5,62 7,38 6,86 5,29 7,03 3,58 4,77 4,06
4,49 3,49 4,66 5,06 4,62 4,76 3,72}

10)

на уровне А1:

{6,75 8,39 7,69 5,58 6,73 6,43 6,97 6,89 6,4 7,01 6,16 6,44 6,9
7,23 7,73 7,8 6,61 6,29 7,53 6,63}

на уровне А2:

{6,65 5,67 6,29 7,7 5,7 7,14 6,22 6,38 7,25 8,37 8,01 7,31 6,77
7 7,7 6,88 7,34 6,81 6,96 7,52}

на уровне А3:

{6,79 7,38 8,38 5,87 6,8 7,21 7,28 7,52 6,93 6,91 8,37 6,51 7,5
7,12 6,89 8,39 6,11 6,32 6,15 6,5}

на уровне А4

{8,38 6,77 9,16 8,49 8,55 6,39 8,37 6,82 9,16 7,65 8,46 8,02 7,9
8,12 7,49 8,13 7,78 8,38 8,46 7,23}

на уровне А5

{6,35 6,06 8,2 8,3 8,06 7,03 7,68 7,53 7,1 7,02 7,03 7,52 6,1
7,61 6,92 8 7,34 6 7,43 7,71}

5 Статистические таблицы

Таблица 4 - Значения F -распределения Фишера для уровня значимости $\alpha=0,05$

k_2	k_1					
	1	2	3	4	5	6
2	18,514	19,000	19,164	19,247	19,296	19,329
3	10,128	9,5521	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406
4	7,7086	6,9443	6,5914	6,3882	6,2561	6,1631
5	6,6079	5,7861	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503
6	5,9874	5,1433	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839
7	5,5914	4,7374	4,3468	4,1203	3,9715	3,8660
8	5,3177	4,4590	4,0662	3,8379	3,6875	3,5806
9	5,1174	4,2565	3,8625	3,6331	3,4817	3,3738
10	4,9646	4,1028	3,7083	3,4780	3,3258	3,2172
11	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946
12	4,7472	3,8853	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961
13	4,6672	3,8056	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153
14	4,6001	3,7389	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477
15	4,5431	3,6823	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905
20	4,3512	3,4928	3,0984	2,8661	2,7109	2,5990
25	4,2417	3,3852	2,9912	2,7587	2,6030	2,4904
30	4,1709	3,3158	2,9223	2,6896	2,5336	2,4205
35	4,1213	3,2674	2,8742	2,6415	2,4851	2,3718
40	4,0847	3,2317	2,8387	2,6060	2,4495	2,3359
45	4,0566	3,2043	2,8115	2,5787	2,4221	2,3083
50	4,0343	3,1826	2,79	2,5572	2,4004	2,2864
55	4,0162	3,1650	2,7725	2,5397	2,3828	2,2687
60	4,0012	3,1504	2,7581	2,5252	2,3683	2,2541
65	3,9886	3,1381	2,7459	2,5130	2,3560	2,2417
70	3,9778	3,1277	2,7355	2,5027	2,3456	2,2312
75	3,9685	3,1186	2,7266	2,4937	2,3366	2,2221
80	3,9604	3,1108	2,7188	2,4859	2,3287	2,2142
85	3,9532	3,1039	2,7119	2,4790	2,3218	2,2072
90	3,9469	3,0977	2,7058	2,4729	2,3157	2,2011
95	3,9412	3,0922	2,7004	2,4675	2,3102	2,1955
100	3,9361	3,0873	2,6955	2,4626	2,3053	2,1906

Таблица 5 – Значения t -распределения Стьюдента

N	P				
	0,6	0,8	0,95	0,99	0,999
1	1,376	3,078	12,706	63,657	636,61
2	1,061	1,886	4,303	9,925	31,598
3	0,978	1,638	3,182	5,841	12,941
4	0,941	1,533	2,776	4,604	8,610
5	0,920	1,476	2,571	4,032	6,859
6	0,906	1,440	2,447	3,707	5,959
7	0,896	1,415	2,365	3,499	5,405
8	0,889	1,397	2,306	3,355	5,041
9	0,883	1,383	2,262	3,250	4,781

<i>N</i>	<i>P</i>				
	<i>0,6</i>	<i>0,8</i>	<i>0,95</i>	<i>0,99</i>	<i>0,999</i>
<i>10</i>	0,879	1,372	2,228	3,169	4,587
<i>11</i>	0,876	1,363	2,201	3,106	4,437
<i>12</i>	0,873	1,356	2,179	3,055	4,318
<i>13</i>	0,870	1,350	2,160	3,012	4,221
<i>14</i>	0,868	1,345	2,145	2,977	4,140
<i>15</i>	0,866	1,341	2,131	2,947	4,073
<i>16</i>	0,865	1,337	2,120	2,921	4,015
<i>17</i>	0,863	1,333	2,110	2,898	3,965
<i>18</i>	0,862	1,330	2,101	2,878	3,922
<i>19</i>	0,861	1,328	2,093	2,861	3,883
<i>20</i>	0,860	1,325	2,086	2,845	3,850
∞	0,842	1,282	1,960	2,576	3,291

Таблица 6 – Значения g-распределения Кохрена для уровня значимости $\alpha=0,05$

Число групп	Число экспериментов								
	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>17</i>	<i>18</i>	<i>19</i>	<i>20</i>	<i>37</i>	<i>145</i>	∞
<i>2</i>	0,8010	0,7880	0,7341	0,7278	0,7219	0,7164	0,6602	0,5813	0,5000
<i>3</i>	0,6167	0,6025	0,5466	0,5402	0,5343	0,5289	0,4748	0,4031	0,3333
<i>4</i>	0,5017	0,4884	0,4366	0,4307	0,4254	0,4205	0,3720	0,3093	0,2500
<i>5</i>	0,4241	0,4118	0,3645	0,3592	0,3544	0,3500	0,3066	0,2513	0,2000
<i>6</i>	0,3682	0,3568	0,3135	0,3088	0,3044	0,3004	0,2612	0,2119	0,1667
<i>7</i>	0,3259	0,3154	0,2756	0,2712	0,2672	0,2635	0,2278	0,1833	0,1429
<i>8</i>	0,2926	0,2862	0,2462	0,2421	0,2384	0,2350	0,2022	0,1616	0,1250
<i>9</i>	0,2659	0,2568	0,2226	0,2188	0,2154	0,2122	0,1820	0,1446	0,1111
<i>10</i>	0,2439	0,2353	0,2032	0,1998	0,1966	0,1936	0,1655	0,1308	0,1000

Перечень использованных информационных ресурсов

1. Воскобойников, Ю.Е. Эконометрика в Excel. В 2х частях. Ч. 1 / Ю.Е. Воскобойников. - Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2005. - 156 с.
2. Фёрстер, Э. Методы корреляционного и регрессионного анализа / Э. Фёрстер, Б.Рёнц. – Москва : Финансы и статистика, 1983. - 304 с.
3. Дрейпер, Н. Прикладной регрессионный анализ. В 2-х книгах. Книга1 / Н. Дрейпер, Г. Смит ; пер. с англ. Ю.П. Адлера и В.Г. Горского. - Изд. 2-е, перераб. и доп. – Москва : Финансы и статистика, 1986. - 366 с.
4. Орлова, А.А. Дисперсионный анализ факторов при имитационном моделировании сложных систем / Орлова А.А. ; научный руководитель Рудаков И.В. // Молодежный научно-технический вестник. - 2013. - № 11. - URL: <http://ainsnt.ru/doc/635566.html> (дата обращения 20.09.2021).
5. Большев, Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 416 с.
6. Biostatistics: A Methodology for the Health Sciences / Gerald van Belle, Lloyd Fisher, Patrick J. Heagerty, Thomas Lumley. - 2nd ed. – [S.I.] : Wiley, 2004. – 896 p. - URL: <http://faculty.washington.edu/heagerty/Books/Biostatistics>